

První derivace a lokální extrémy

Robert Mařík

27. června 2006

Obsah

Extrémy funkce	$y = x^3 - 2x^2 + x + 1$	3
Extrémy funkce	$y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$	19
Extrémy funkce	$y = \frac{x}{(1+x)^3}$	33
Extrémy funkce	$y = \frac{x^3}{x-1}$	47
Extrémy funkce	$y = \frac{3x+1}{x^3}$	63
Extrémy funkce	$y = x^2 e^{-x}$	80
Extrémy funkce	$y = \frac{x^2}{\ln x}$	93

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ a určete intervaly monotonosti.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ a určete intervaly monotonosti.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

- Určíme definiční obor funkce.
- Nejsou žádná omezení, je tedy funkce definovaná (a spojitá) na \mathbb{R} .

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$y' = (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' + (1)'$$

Vypočteme derivaci. Užijeme vzorec pro derivaci součtu a násobku.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}y' &= (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' + (1)' \\ &= 3x^2 - 4x + 1 + 0\end{aligned}$$

Vypočítáme jednotlivé derivace podle vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}y' &= (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' + (1)' \\ &= 3x^2 - 4x + 1 + 0 \\ &= 3x^2 - 4x + 1\end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \quad y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

- Chceme zjistit, kde funkce roste a kde klesá.
- K tomu stačí zjistit, kde je kladná a kde je záporná derivace.
- Musíme tedy nejprve hledat body, kde derivace může změnit znaménko. Body nespojitosti derivace nemá a soustředíme se na body, kde je derivace nulová.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \quad y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

Řešíme kvadraticou rovnicí. Řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \quad y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{4 \pm 2}{6} \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$Dom(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$
$$= \frac{4 \pm 2}{6}$$

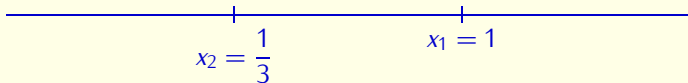
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

Určíme řešení. Rovnice má dva reálné různé kořeny.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

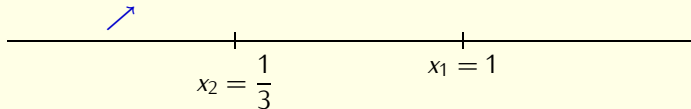
$Dom(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$



- Vyznačíme stacionární body na reálnou osu.
- Body nespojitosti nejsou, nevynášíme tedy už nic dalšího.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

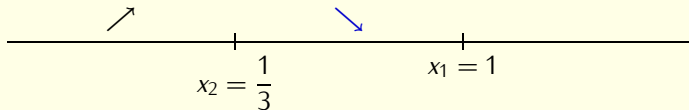
$Dom(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$



- Zvolíme číslo z prvního intervalu $(-\infty, \frac{1}{3})$. Uvažujme například číslo $\xi_1 = 0$.
- Vypočteme $y'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$. Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, \frac{1}{3})$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$Dom(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$



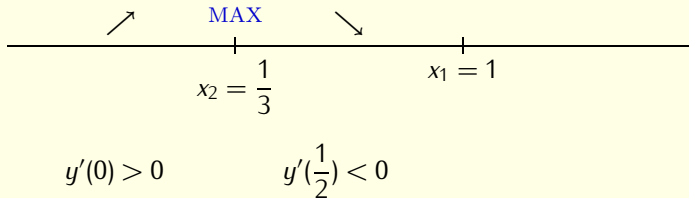
$$y'(0) > 0$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

Podobně, protože platí $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} < 0$, je funkce klesající na intervalu $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

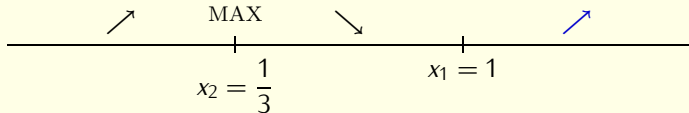
$Dom(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$



Monotonie se mění v bodě x_2 . Funkce má v tomto bodě lokální maximum.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$Dom(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$



$$y'(0) > 0$$

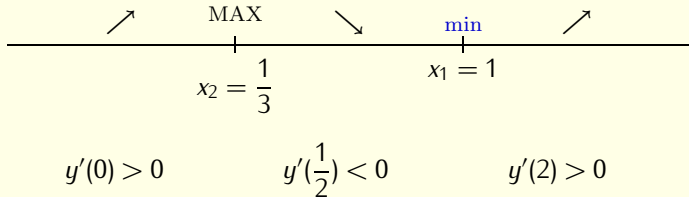
$$y'(\frac{1}{2}) < 0$$

$$y'(2) > 0$$

Platí $y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5$

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

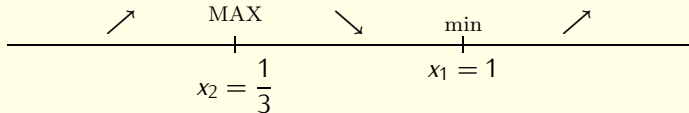
$Dom(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$



Monotonie se mění v bodě $x_1 = 1$ a je zde lokální extrém – lokální minimum.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

$Dom(f) = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$; Stac. body: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$



Hotovo!

Najděte lokální extrémů funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$ a určete intervaly monotonosti.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

Určíme definiční obor funkce. Jediné omezení pochází ze jmenovatele zlomku.

$$1 - x \neq 0,$$

t.j.

$$x \neq 1.$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$y' = 4 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^3 \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

- Derivujeme složenou funkci. Vnější složka je mocninná funkce, kterou derivujeme podle pravidla $(x^4)' = 4x^3$.
- Vnitřní složka je zlomek, který derivujeme podle pravidla $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= 4 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^3 \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= 4 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^3} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Upravíme druhý zlomek.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= 4 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^3 \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= 4 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^3} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5} \end{aligned}$$

Ještě upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5};$$

- Našli jsme derivaci y' .
- Omezení na x plynoucí z y' jsou stejná, jako byla u původní funkce. Derivace je tedy definována na množině $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5};$$

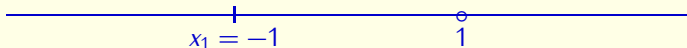
Stacionární bod: $x_1 = -1$

- Hledáme body, kde $y' = 0$.
- Podíl je nula, pokud je čítecel nula.
Jediný stacionární bod je tedy řešením rovnice

$$(1+x)^3 = 0.$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

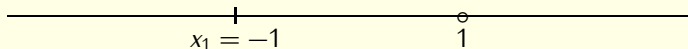
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



- Vyznačíme stacionární bod a bod nespojitosti na osu.
- Osa je rozdělena na tři podintervaly. Na každém podintervalu má funkce ve všech bodech tentýž typ monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

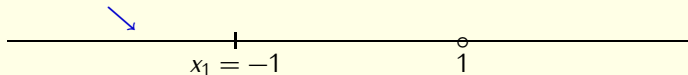
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



- Zkoumáme typ monotonie na intervalu $(-\infty, -1)$
- Vybereme libovolný testovací bod z tohoto intervalu.
- Buď $\xi_1 = -2$ takový testovací bod.
- Určíme derivaci v tomto bodě.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



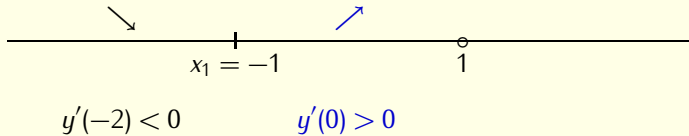
$$y'(-2) < 0$$

$$y'(-2) = 8 \frac{(1-2)^3}{(1-(-2))^5} = 8 \frac{-1}{3^5} < 0.$$

Derivace je záporná a funkce klesá v bodě $\zeta_2 = -2$ a na intervalu $(-\infty, -1)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



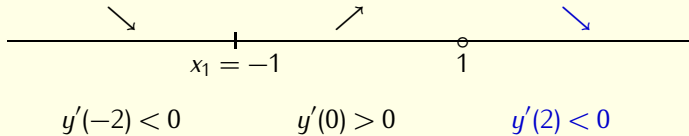
Podobně naložíme s bodem $\xi_2 = 0$, který náleží do intervalu $(-1, 1)$ a splňuje

$$y'(0) = 8 \frac{1}{1^5} > 0.$$

Funkce je rostoucí v bodě $\xi_2 = 0$ a na intervalu $(-1, 1)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



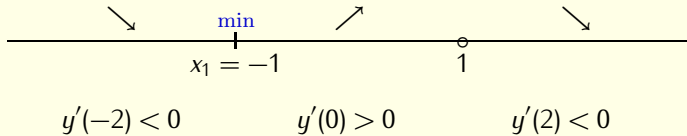
Konečně, bod $\xi_3 = 2$ patří do intervalu $(1, \infty)$ a splňuje

$$y'(2) = 8 \frac{(1+2)^3}{(1-2)^5} < 0.$$

Funkce je klesající v bodě $\xi_3 = 2$ a na intervalu $(1, \infty)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

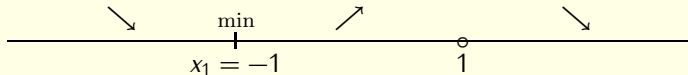
$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$; $x_1 = -1$



- Funkce má lokální minimum v $x = -1$.
- Funkce nemá žádný další lokální extrém. Zejména, funkce nemá extrém v bodě $x = 1$, protože $1 \notin Dom(f)$.

Najděte lokální extrémů funkce $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



Hotovo!

Najděte lokální extrémů funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ a určete intervaly monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

Určíme definiční obor. Jediné omezení plyne ze jmenovatele zlomku:

$$1 + x \neq 0,$$

t.j.

$$x \neq -1.$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

$$y' = \frac{1(1+x)^3 - x \cdot 3(1+x)^2}{((1+x)^3)^2}$$

- Derivujeme funkci podle pravidla pro derivaci podílu.
- Při derivování jmenovatele $(1+x)^3$ neumocňujeme, ale použijeme řetězové pravidlo $((1+x)^3)' = 3(1+x)^2(1+x)' = 3(1+x)^2$. Tento trik umožní v dalším kroku vytknout a zkrátit.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1(1+x)^3 - x \cdot 3(1+x)^2}{((1+x)^3)^2} \\ &= \frac{(1+x)^2(1+x-3x)}{(1+x)^6} \end{aligned}$$

Upravíme čítec druhého zlomku. Vytkneme výraz $(1+x)^2$ před závorku v čitateli.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1(1+x)^3 - x \cdot 3(1+x)^2}{((1+x)^3)^2} \\ &= \frac{(1+x)^2(1+x-3x)}{(1+x)^6} \\ &= \frac{1-2x}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

Zkrátíme $(1+x)^2$ a upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4};$$

- Máme derivaci y' .
- Definiční obor této derivace se shoduje s definičním oborem původní funkce, t.j. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Budeme zkoumat znaménko derivace.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4};$$

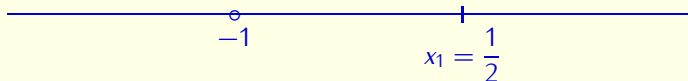
Stacionární bod: $x_1 = \frac{1}{2}$

- Hledáme nejprve body, kde platí $y' = 0$.
- Zlomek je nulový, pokud je nulový čítec.
Jediný stacionární bod je tedy řešením rovnice

$$1 - 2x = 0.$$

Najděte lokální extrémů funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

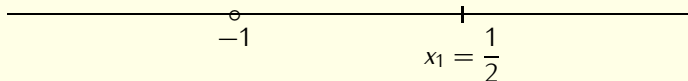
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



- Zakreslíme stacionární bod a bod nespojitosti na reálnou osu.
- Osa je rozdělena na tři podintervaly. Funkce zachovává na každém intervalu typ monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

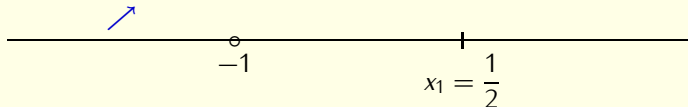
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



- Zkoumejme interval $(-\infty, -1)$
- Zvolíme v tomto intervalu testovací bod.
- Nechť $\xi_1 = -2$ je testovací bod.
- Určíme derivaci v tomto bodě.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



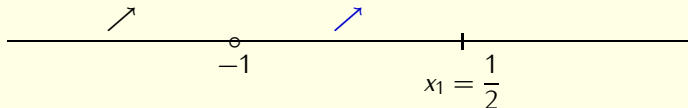
$$y'(-2) > 0$$

$$y'(-2) = \frac{1 - 2(-2)}{(1 - 2)^6} = \frac{5}{1} > 0.$$

Derivace je kladná a funkce roste v bodě $\xi_2 = -2$ a na intervalu $(-\infty, -1)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



$$y'(-2) > 0$$

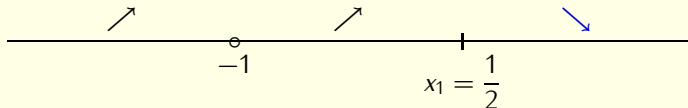
$$y'(0) > 0$$

Podobně, bod $\xi_2 = 0$ leží v intervalu $(-1, \frac{1}{2})$ a splňuje

$y'(0) = \frac{1}{1} > 0$. Funkce je rostoucí v bodě $\xi_2 = 0$ a na intervalu $(-1, \frac{1}{2})$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



$$y'(-2) > 0$$

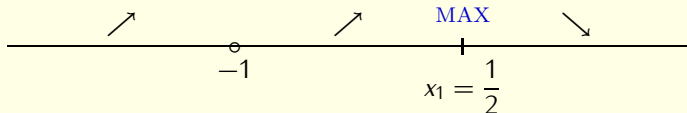
$$y'(0) > 0$$

$$y'(2) < 0$$

Konečně, platí $y'(2) = \frac{1-4}{3^4} < 0$. Funkce klesá v bodě $\xi_3 = 2$ a na intervalu $(\frac{1}{2}, \infty)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



$$y'(-2) > 0$$

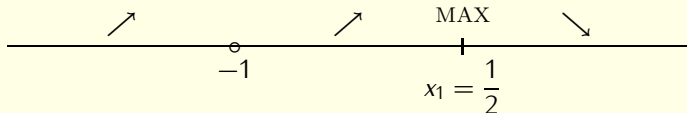
$$y'(0) > 0$$

$$y'(2) < 0$$

- Funkce má lokální maximum v bodě $x = \frac{1}{2}$.
- Funkce nemá žádný další lokální extrém.

Najděte lokální extrémů funkce $y = \frac{x}{(1+x)^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



Hotovo!

Najděte lokální extrémů funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$ a určete intervaly monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

Určíme definiční obor. Nesmí být nula ve jmenovateli.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$y' = \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2}$$

Derivujeme podíl podle vzorce

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - x^3(1-0)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Doderivujeme

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - x^3(1-0)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Upravíme. Zde je jedno jestli nejprve roznásobíme nebo vytkneme, protože roznásobujeme jenom mocninou x .

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - x^3(1-0)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Rozložíme na součin.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2};$$

$$\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0$$

- Našli jsme derivaci. Zajímá nás, kdy je tato derivace kladná a kdy záporná.
- Předně: derivace není definovaná pro $x = 1$.
- Dále řešíme rovnici $y' = 0$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2};$$

$$\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2(2x-3) = 0$$

Zlomek je nulový právě tehdy, když je nulový čítenel zlomku.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2(2x-3) = 0$$

$$x_{1,2} = 0$$

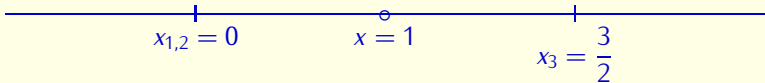
$$x_3 = \frac{3}{2}$$

Součin je nula jestliže je alespoň jeden ze součinitelů roven nule.

Řešíme tedy rovnice $x^2 = 0$ a $2x - 3 = 0$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

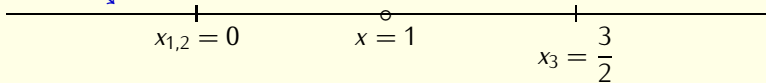
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$



- Máme stacionární body a body, kde derivace není definována (a je nespojitá).
- Jedině v těchto bodech může derivace měnit znaménko. Vynešeme tyto body na reálnou osu.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$



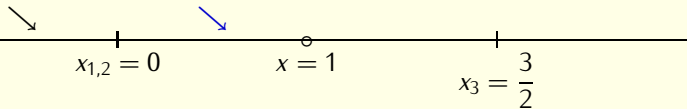
$$y'(-1) < 0$$

Počítáme derivace v libovolných bodech, po jednom z každého podintervalu.

$$y'(-1) = \frac{(-1)^2(-2-3)}{\text{něco kladného}} = \frac{-5}{\text{něco kladného}} < 0$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$

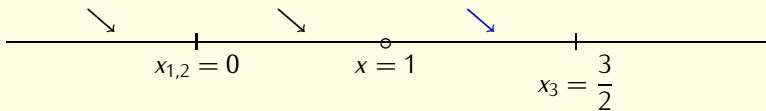


$$y'(-1) < 0 \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}(1-3)}{\text{něco kladného}} < 0$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$

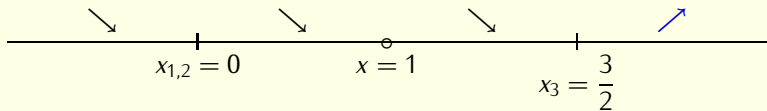


$$y'(-1) < 0 \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad y'(1,2) < 0$$

$$y'(1,2) = \frac{(1,2)^2(2,4-3)}{\text{něco kladného}} < 0$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$



$$y'(-1) < 0$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

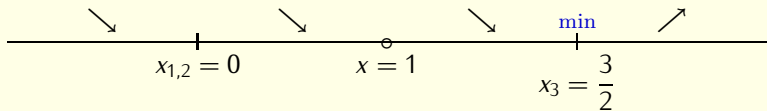
$$y'(1,2) < 0$$

$$y'(2) > 0$$

$$y'(2) = \frac{(2)^2(4-3)}{\text{něco kladného}} > 0$$

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$

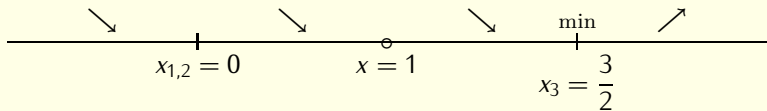


$$y'(-1) < 0 \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad y'(1,2) < 0 \quad y'(2) > 0$$

Pouze v bodě $x = \frac{3}{2}$ se mění charakter monotonie. V tomto bodě je lokální minimum.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{x^3}{x-1}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$



$$y'(-1) < 0 \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad y'(1,2) < 0 \quad y'(2) > 0$$

Hotovo.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ a určete intervaly monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

Určíme definiční obor funkce. Jediné omezení plyne ze jmenovatele zlomku. Tedy $x \neq 0$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$y' = \frac{3x^3 - (3x + 1)3x^2}{(x^3)^2}$$

Derivujeme podíl podle vzorce

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

kde $u = 3x + 1$ a $v = x^3$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$y' = \frac{3x^3 - (3x + 1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2(x - (3x + 1))}{x^6}$$

- Hledáme nejprve body, kde je derivace nulová.
- Abychom měli později snadné a pohodlné, co nejvíce upravíme a rozložíme na součin.
- Vytkneme tedy faktor $3x^2$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3x^3 - (3x + 1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2(x - (3x + 1))}{x^6} \\ &= 3 \frac{x - 3x - 1}{x^4} \end{aligned}$$

- Zkrátíme faktorem x^2 .
- Konstantní násobek 3 napíšeme před zlomek.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3x^3 - (3x + 1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2(x - (3x + 1))}{x^6} \\ &= 3 \frac{x - 3x - 1}{x^4} = 3 \frac{-2x - 1}{x^4} \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3x^3 - (3x + 1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2(x - (3x + 1))}{x^6} \\ &= 3 \frac{x - 3x - 1}{x^4} = 3 \frac{-2x - 1}{x^4} = -3 \frac{2x + 1}{x^4} \end{aligned}$$

Vytkneme záporné znaménko.

Najděte lokální extrémů funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4};$$

- Definiční obor derivace je shodný s definičním oborem původní funkce.
- Hledáme nejprve stacionární body.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

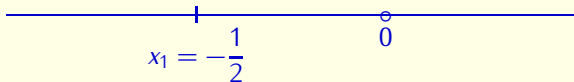
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4};$$

Stacionární bod: $x_1 = -\frac{1}{2}$.

- Podíl je nulový, pokud je nulový čítenel.
- $2x + 1 = 0$ pro $x = -\frac{1}{2}$. Bod $x_1 = -\frac{1}{2}$ je jediným stacionárním bodem zadané funkce.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

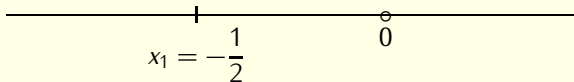
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3\frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



- Vyznačíme bod nespojitosti a stacionární bod na osu x .
- Osa x je rozdělena na podintervaly. Na každém podintervalu je zachován tentýž typ monotonie pro všechna x náležející do tohoto podintervalu.

Najděte lokální extrémů funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

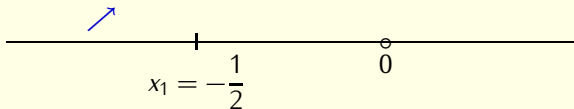
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



Zvolíme testovací bod z intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Nechť je to bod $\xi_1 = -1$. Vypočteme **derivaci** v bodě ξ_1 .

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

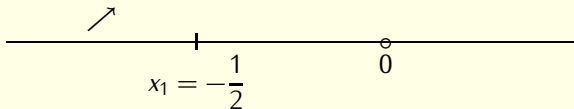


$$y'(-1) = -3 \frac{-2 + 1}{(-1)^4} > 0$$

Funkce je tedy rostoucí v bodě $\xi_1 = -1$ a totéž platí pro všechny body z intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

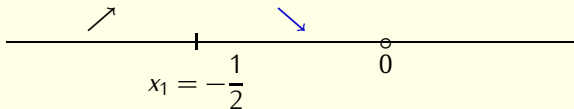
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



Zvolíme bod $\xi_2 = -\frac{1}{4}$ z intervalu $(-\frac{1}{2}, 0)$. Určíme **derivaci** v tomto bodě.

Najděte lokální extrémů funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

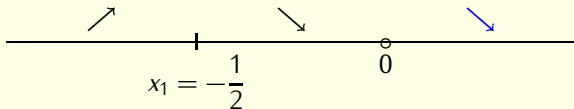


$$y'(-1/4) = -3 \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\text{kladný výraz}} < 0$$

a funkce je tedy klesající v bodě $\xi_2 = -1/4$ a i na celém intervalu $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



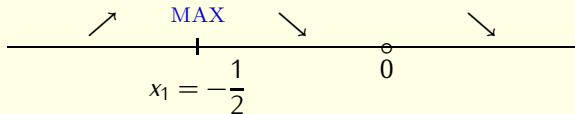
Podobně, pro $\xi_3 = 1$ dostáváme

$$y'(1) = -3 \frac{2 + 1}{\text{kladný výraz}} < 0$$

a funkce je klesající v bodě $\xi_3 = 1$ a na intervalu $(0, \infty)$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

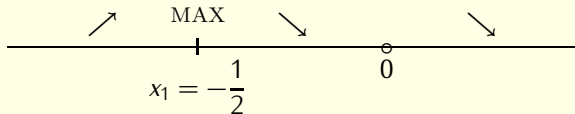
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



- Funkce je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Funkce má lokální maximum v bodě $x = -\frac{1}{2}$ a nemá žádný další lokální extrém.

Najděte lokální extrémů funkce $y = \frac{3x + 1}{x^3}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



- Problém je vyřešen!
- Všechno co se týká monotonie plyne z nakresleného schématu.

Najděte lokální extrémů funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$Dom(f) = \mathbb{R} ;$$

Na proměnnou x nemní třeba naložit žádné omezující podmínky a proto je definičním oborem celá množina \mathbb{R} .

Najděte lokální extrémů funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y' = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})'$$

Použijeme pravidlo pro derivaci součinu

$$(uv)' = u'v + uv'$$

with $u = x^2$ and $v = e^{-x}$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y' = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x}$$

Dále použijeme derivaci mocninné funkce x^2 a funkci e^{-x} derivujeme podle pravidla pro derivaci složené funkce.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} \\ &= e^{-x}(2x - x^2) \end{aligned}$$

- Hledáme body s nulovou derivací: $y' = 0$.
- Abychom tuto rovnici snadno vyřešili, rozložíme na součin.
- Vytkneme opakující se výraz e^{-x} .

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} \\ &= e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2 - x) \end{aligned}$$

Kvadratický výraz v závorce je možno rozložit na součin vytknutím x .

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ;$$

Stacionární body: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

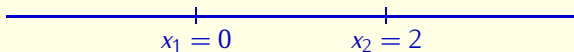
- Nyní vidíme všechny stacionární body.
- Derivace je nula tehdy a jen tehdy, když alespoň jeden z výrazů v součinu je nulový.
- Výraz e^{-x} není roven nule nikdy.
- Výraz $(x - 2)$ je roven nule pro $x = 2$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$



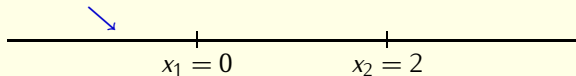
- Vyznačíme stacionární body na reálnou osu. Body nespojitosti derivace nemá
- Osa je rozdělena na tři podintervaly.
- Ve všech bodech jednoho každého podintervalu je stejný typ monotonie.

Najděte lokální extrémů funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$



Zvolíme libovolného reprezentanta z prvního intervalu $(-\infty, 0)$.
nechť tímto reprezentantem je číslo $\xi_1 = -1$. Vypočteme **derivaci** v ξ_1 :

$$y'(-1) = e^{-(-1)}(-1)(2 - (-1)) = e^1(-1)3 < 0$$

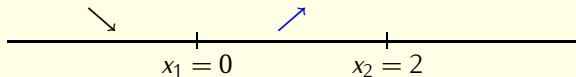
Funkce je tedy klesající v bodě ξ_1 a totéž platí pro všechny body intervalu $(-\infty, 0)$.

Najděte lokální extrémů funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$



Zvolíme reprezentanta $\xi_2 = 1$ v intervalu $(0, 2)$. **Derivace**

$$y'(1) = e^{-1} 1(2 - 1) = e^{-1} > 0$$

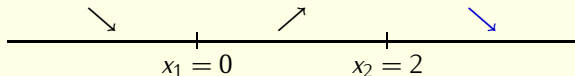
je v tomto bodě kladná a funkce roste v bodě $\xi_2 = 1$ a i v celém intervalu $(0, 2)$.

Najděte lokální extrémů funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$



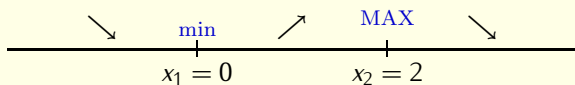
Zvolíme reprezentanta $\xi_3 = 3$ v intervalu $(2, \infty)$. Derivace

$$y'(3) = e^{-3} 3(2 - 3) = -3e^{-3} < 0$$

je záporná a funkce klesá v bodě $\xi_3 = 3$ a klesá i v celém intervalu $(2, \infty)$.

Najděte lokální extrémů funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ; \quad y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ; \quad x_1 = 0, x_2 = 2.$$



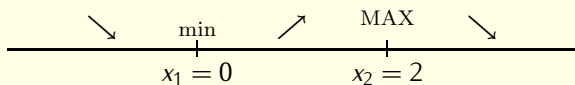
- Funkce je spojitá na \mathbb{R} .
- Ze schématu s monotonií plyne že funkce má lokální minimum v bodě $x = 0$ a maximum v bodě $x = 2$.

Najděte lokální extrémy funkce $y = x^2 e^{-x}$ a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$



- Vyřešeno!

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$. Establish the intervals of monotonicity.

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty).$$

- We establish the domain of the function.
- There is a restriction $x > 0$ from the $\ln(\cdot)$ function.
- There is a restriction $\ln x \neq 0$ from the denominator of the fraction. Since $\ln x = 0$ for $x = e^0 = 1$, this is equivalent to the restriction $x \neq 1$.
- The domain is $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

We differentiate by the quotient rule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

with $u = x^2$ and $v = \ln x$.

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty).$$

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x}$$

We simplify the numerator.

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

- We will look for the points where $y' = 0$.
- The fraction equals zero iff the numerator equals zero.
- From this reason it is useful to factor the numerator.
- We take out the common factor x in the numerator.

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

- Now it is easy to find the stationary points.
- The fraction equals zero iff one of the factors in the numerator equals to zero.

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

Stationary point: $x_1 = e^{1/2}$.

- The factor $(2 \ln x - 1)$ equals zero for $\ln x = \frac{1}{2}$, i.e. for $x = e^{1/2}$

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

Stationary point: $x_1 = e^{1/2}$.

- The factor x never equals zero due to the restriction on the domain.
- There is no other stationary point

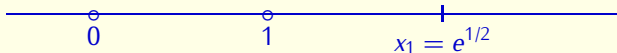
Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty) ; \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x} ; \quad x_1 = e^{1/2}.$$

- We will work with the derivative and the stationary point.
- We have to find the domain of the derivative. Since the restrictions are the same as for the original function, the domain of f' is the same as the domain of f .

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

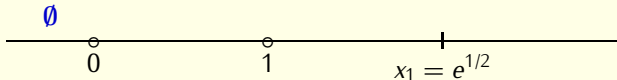
$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$



- We mark the domain of the derivative (including the point of discontinuity) and the stationary point to the real axis.
- Since $1 = e^0$ and $0 < 1/2$, then $1 < e^{1/2}$. (The exponential function is increasing)

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

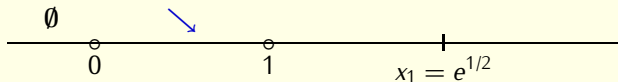
$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$



- The axis is divided into four subintervals. One of these subintervals does not belong to the domain.
- In each of the remaining subintervals the type of the monotonicity is preserved for all x .

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

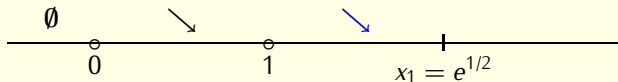
$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$



Let $\xi_1 = e^{-1}$ is a test number from the first subinterval. The **derivative** at ξ_1 is negative, since $y'(-1) = \frac{e^{-1}(-2-1)}{(-1)^2} < 0$, where we used $\ln(e^{-1}) = -1$. Hence the function is decreasing at ξ_1 and the same is true for the interval $(0, 1)$.

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$

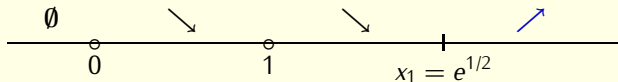


$\xi_2 = e^{1/4}$ satisfies $1 < e^{1/4} < e^{1/2}$ and $\ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2}$. Hence

$$y'(e^{1/4}) = \frac{e^{1/4}(\frac{1}{2} - 1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} < 0.$$

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$

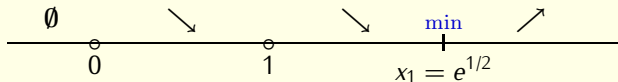


$\xi_3 = e$ satisfies $1 < e$ and $\ln(e) = 1$. Hence

$$y'(e) = \frac{e(2-1)}{1^2} > 0.$$

Find local extrema of the function $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$



Finished. The function possesses unique local minimum at $x = e^{1/2}$ and no local maximum.

KONEC